**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ПЛЕНОЧНЫМ ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТОМ В УПРУГОМ СЛОЕ**

*Пасько Д. А., студент*

*Барейко И. А., студент*

*Ерёмин А. А., старший преподаватель кафедры налогов*

*и налогообложения*

*Кубанский государственный университет (г. Краснодар)*

**Ключевые слова**:

**Аннотация**

**Описание задачи**

**Постановка задачи**.

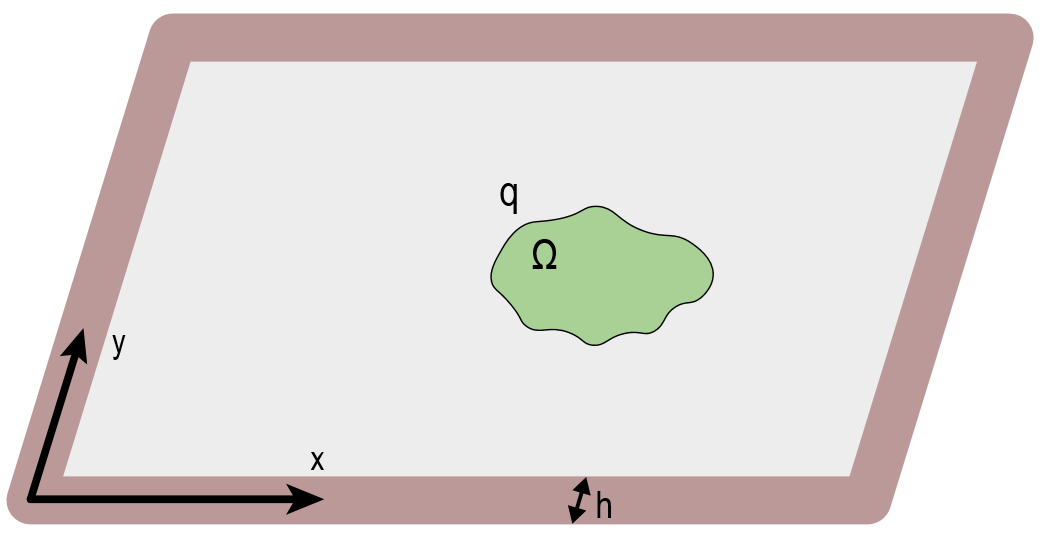


Рисунок 1: Геометрия задачи

Рассматриваются гармонические колебания изотропного слоя толщины , занимающего в системе координат полубесконечную область . Источником колебаний служит тонкий вертикально поляризованный пьезоактуатор, контактирующий с поверхностью по области с центром в начале координат. С использованием принципа суперпозиции и обратного преобразования Фурье нестационарные перемещения слоя могут быть выражены через гармонические (частотный спектр), причём комплексная амплитуда перемещений удовлетворяет уравнению Ляме:

(1)

где — оператор Ляме:

— константы Ляме.

Внешние поверхности волновода и предполагаются свободными от напряжений за исключением области , где действие актуатора моделируется нагрузкой . С использованием полуаналитического интегрального подхода поле , возбуждаемое пьезоактуатором в волноводе без препятствий (поле источника), при фиксированной частоте представимо в виде

(2)

где и — Фурье-символы матрицы Грина для слоистой упругой среды с заданными на поверхности напряжениями и нагрузки соответственно.

Матрица представима в следующем виде:

(3)

где — некоторые комплексные функции, зависящие от и . Алгоритм их построения приводится в работах [1, 2].

**Переход к полярным координатам**. Поскольку указанные функции зависят только от переменной (а не отдельно от ), интеграл (2) можно свести к однократному. Для этого осуществляется переход в полярную систему координат ([1]), что позволяет после некоторых преобразований представить равенство (2) в виде:

(4)

где

. (5)

Контур в уравнении (4) представляет собой положительную действительную полуось с отклонением в соответствии с принципом предельного поглощения ([4]) таким образом, чтобы обходить полюса функции (уравнение 5) снизу.

**Представление через вычеты**. Наряду с прямым вычислением интеграла (4) в дальней от источника зоне (т.е. при ) использовались соответствующие асимптотические представления ([1]), полученные с применением теории вычетов. В результате

(6)

где — полюса функции , — некоторая погрешность, большая погрешности поиска полюсов, — вычет функции в полюсе .

**Вид функции q**. Поскольку в области низких частот нагрузка концентрируется в основном на границе пьезоэлемента, допустима аппроксимация по нормальным модам, центрированным на точечных источниках , в следующем виде ([5]):

(7)

где — число точечных источников, — координата -го источника (располагается на границе пьезоэлемента), — весовой коэффициент, — угол между осью и нормалью к от центра пьезоэлемента, — дельта-функция.

В таком случае для функции из уравнения (2) верно:

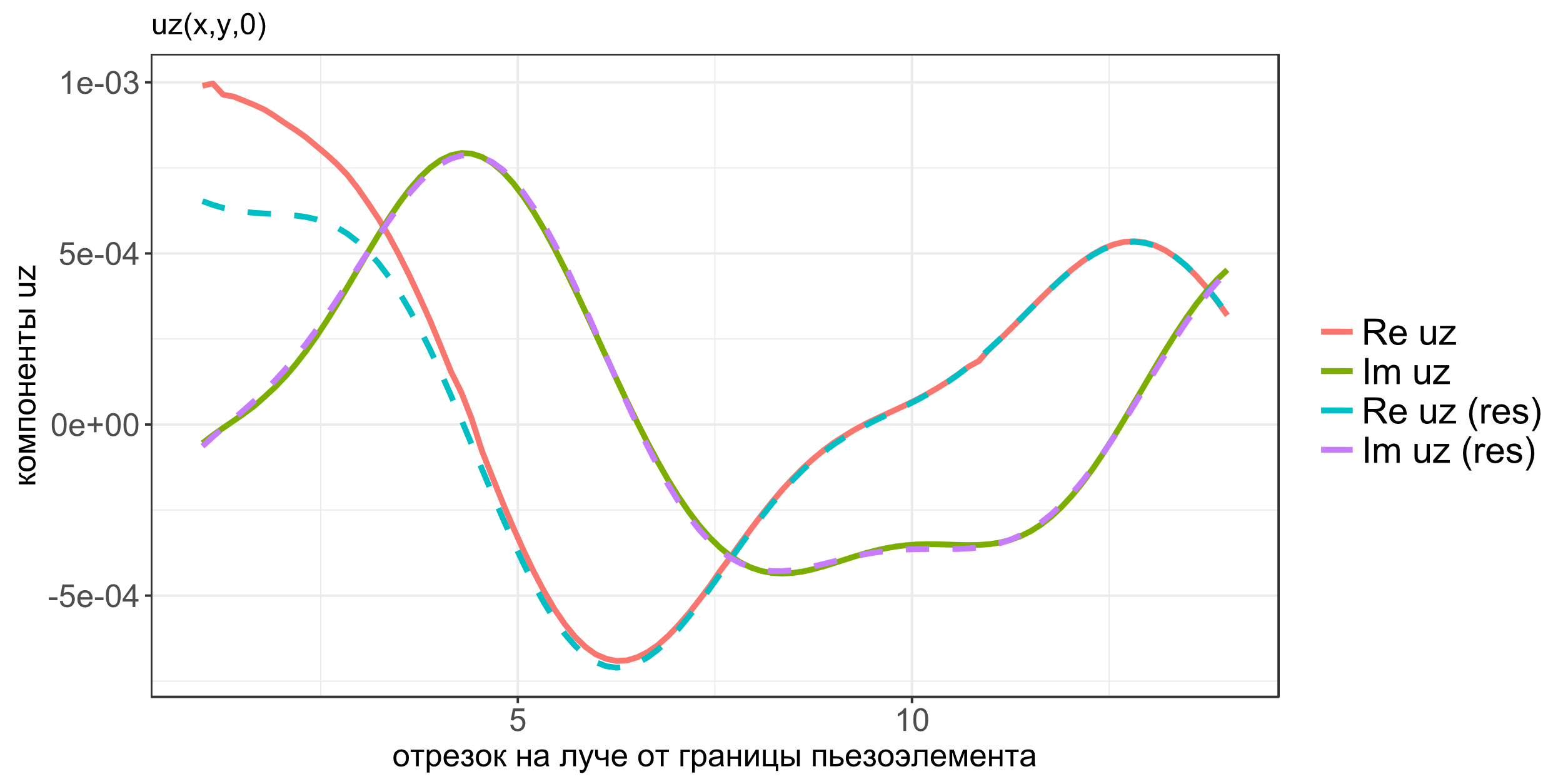
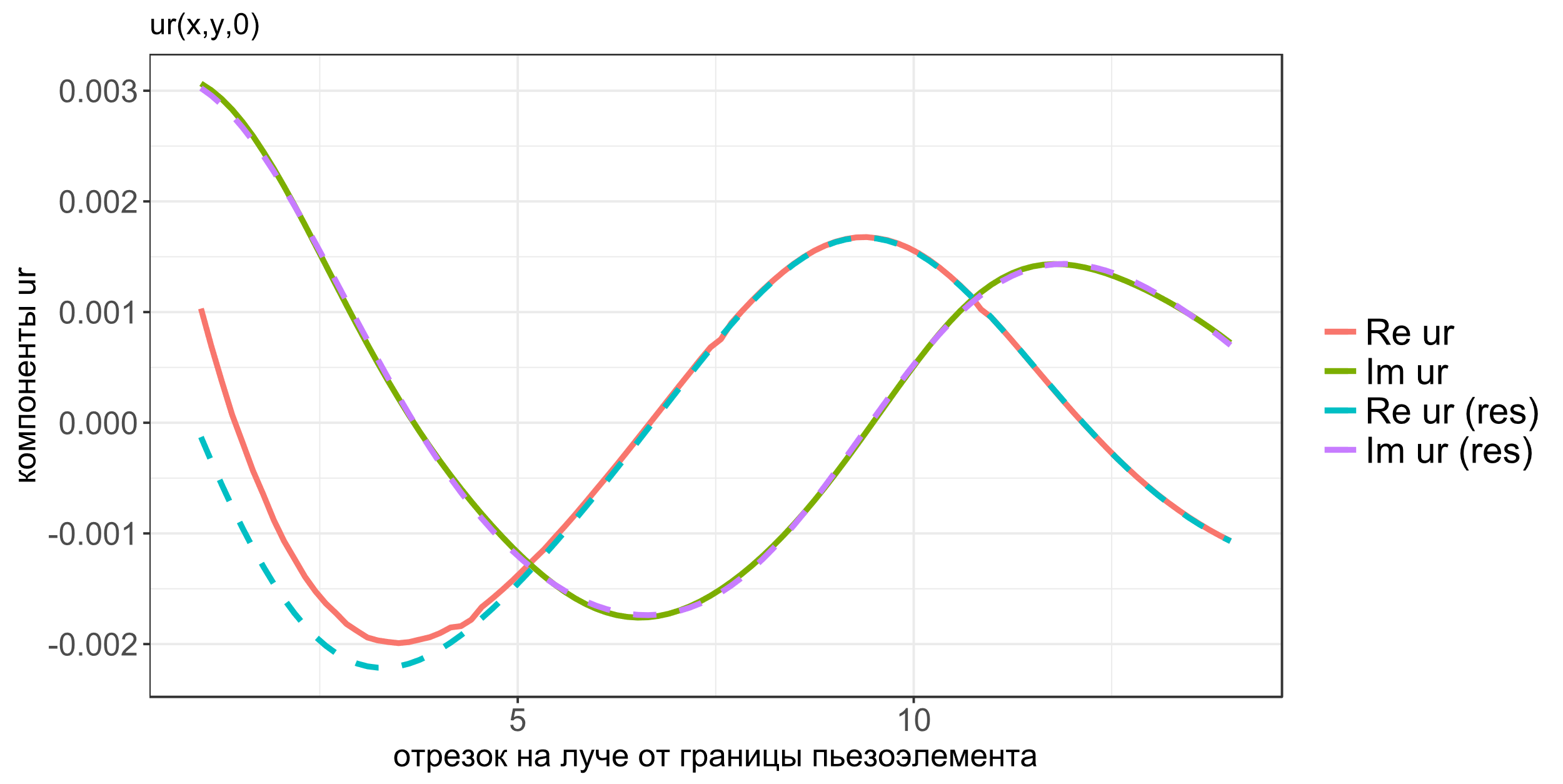
(8)

где — такая же функция из (4) или (6) с той разницей, что .

## Результаты

При численной реализации интегралы типа (4) считались по квадратурам Гаусса-Кронрода, кривая совпадала с лучом везде, кроме отрезка , где — множество положительный вещественных полюсов подынтегральной функции, искавшихся на достаточно большом отрезке Brent-методом в качестве корней уравнения , в котором — общий знаменатель функций . На самом отрезке контур деформировался в нижнюю комплексную полуплоскость. При подсчёте искомой функции по формуле (12) сумма бралась по всем положительным вещественным полюсам . Расчёты проводились для поверхности пластины ().

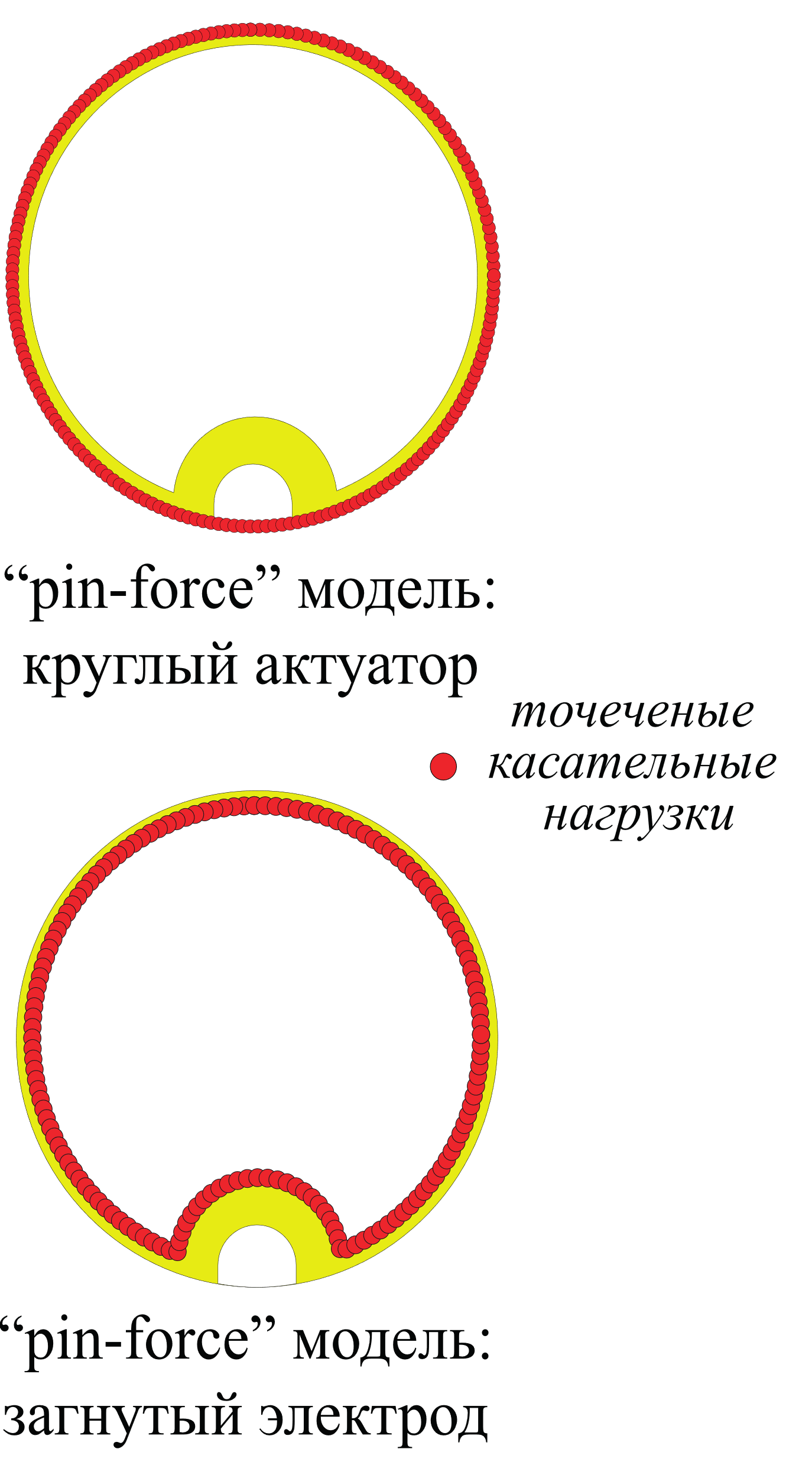
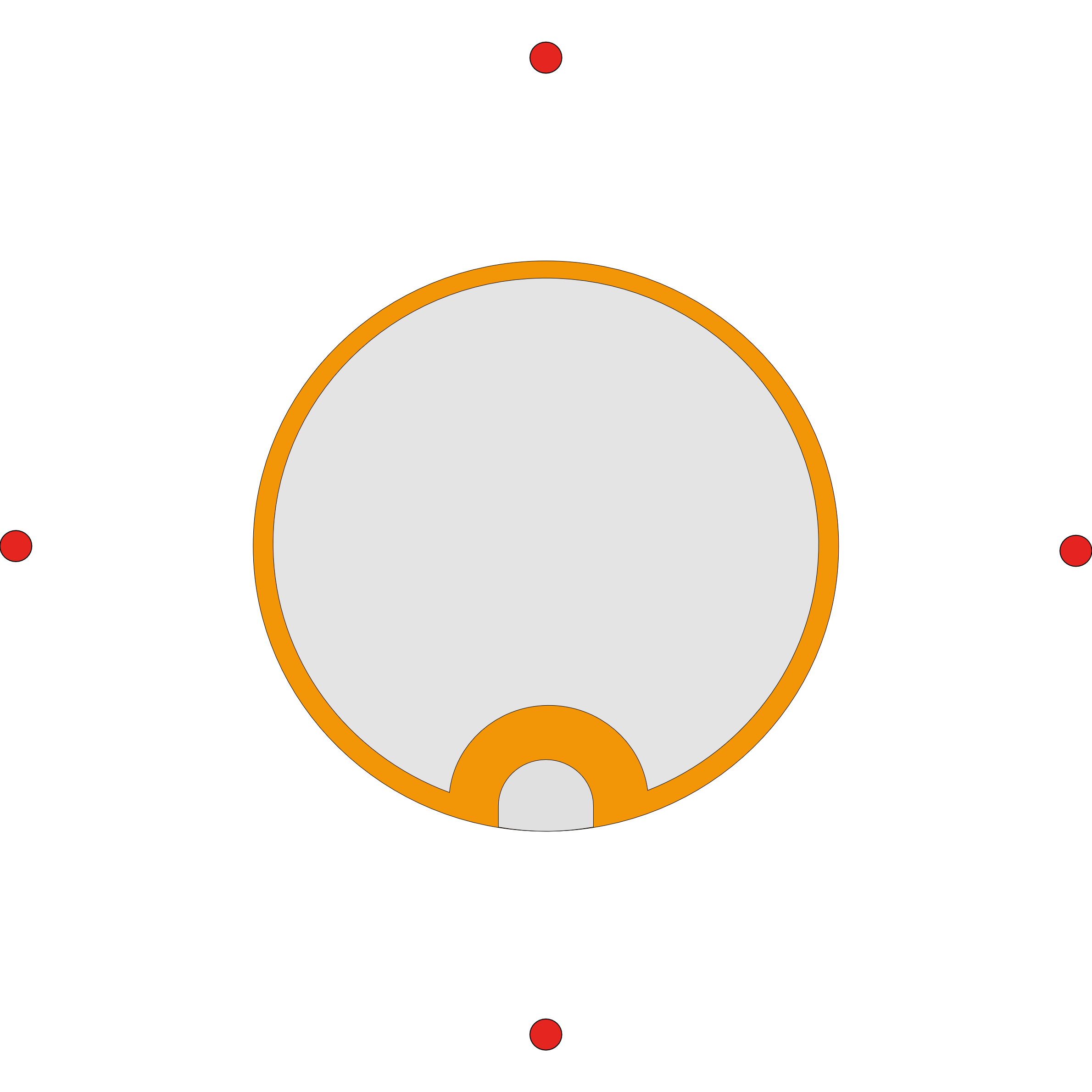
Интерес представляли функции , где — угол между осью и нормалью к от центра пьезоэлемента. На рисунках показано, как функции , посчитанные по вычетам, аппроксимируют те же функции, посчитанные через интегралы.



а) б)

Рисунок 2: Действительная и мнимая части функций , посчитанных через интегралы и по вычетам, при удалении от пьезоэлемента по нормали. Центр пьезоэлемента — , радиус , угол наклона , частота , число источников .

Далее, ввиду геометрии пьезоэлемента имеется два варианта расположения точечных источников (Рисунок 3а), причём оба варианта будут обеспечивать разные результаты на близких и средних от актуратора дистанциях (Рисунок 3б, Рисунок 4).



а) б)

Рисунок 3: а) варианты расположения пьезоэлементов по границе актуатора, б) расположение точек вне актуатора, в которых проводился эксперимент

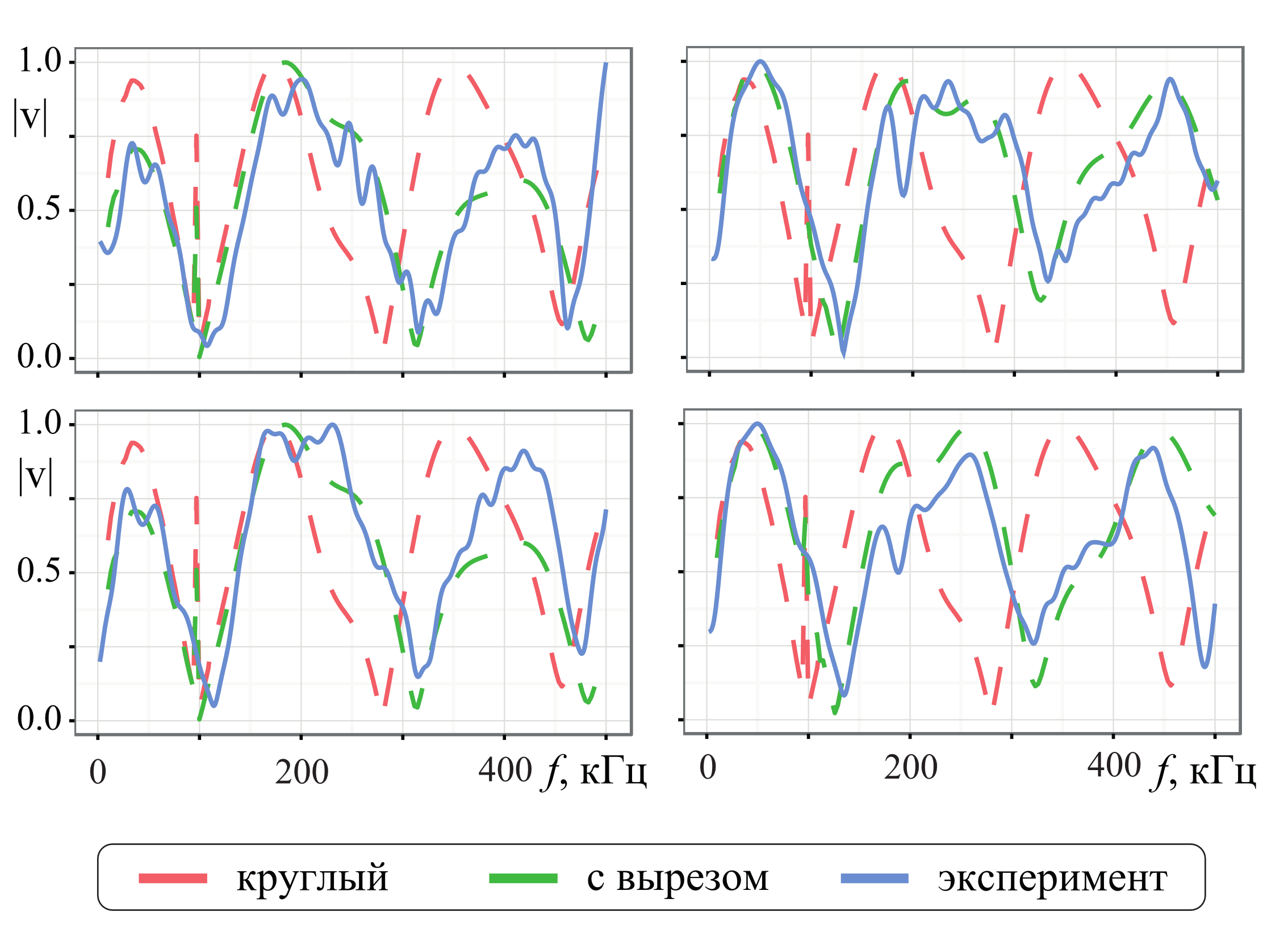


Рисунок 4: Нормированная амплитуда спектра вертикальной компоненты

скорости колебаний в заданных точках поверхности слоя. Пунктиром обозначены данные, полученные моделью

*Библиографический список*

1. Бабешко В. А, Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. — М., 1989;

2. Глушков Е. В., Глушкова Н. В. Интегральные преобразования в теории упругости. — Кр., 1990;

3. Глушков Е. В., Глушкова Н. В. Интегральные преобразования и волновые процессы. — Кр., 2017;

4. А.Н. Тихонов, А.А. Cамарский. О принципе излучения. Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1948, т. 18, вып. 2;

5. Evgeny Glushkov, Natalia Glushkova, Rolf Lammering, Artem Eremin, Mirko N Neumann. Lamb wave excitation and propagation in elastic plates with surface obstacles: proper choice of central frequencies. Smart Mater. Struct. 20 (2011) 015020 (11pp).